Capítulo 5

O Modelo Neoclássico com Capital Humano: Equilíbrio de Longo Prazo

Como vimos nos dois capítulos anteriores, o modelo de Solow apresenta um conjunto de características que lhe permitem explicar um número bastante significativo dos principais factos do crescimento económico deste século. No entanto, este modelo apresenta três grandes limitações.

Primeiro, a política económica pouco ou nada pode fazer no sentido de criar condições para que se possam obter taxas de crescimento mais elevadas no longo prazo (lembre–se que a taxa de crescimento era dada pela soma de duas forças totalmente exógenas à economia, $n + m$);

Segundo, o modelo prevê a existência de convergência dos níveis do rendimento per capita entre os países economicamente mais desenvolvidos e os menos desenvolvidos, independentemente das condições iniciais de partida dos países nestes dois grupos. Como a taxa de crescimento do produto per capita era igual à taxa de crescimento do conhecimento tecnológico (m), e como este bem é considerado no modelo como um bem inteiramente disponível *a nível mundial* (e, portanto, livremente disponível em toda e qualquer parte), todas as economias terão livre acesso a este bem e tenderão para o mesmo equilíbrio de longo prazo, mais tarde ou mais cedo. Note que isto verifica–se mesmo que as economias em termos individuais não apliquem quaisquer recursos significativos em investigação científica e tecnológica.

Terceiro, o modelo apresenta esta convergência económica como sendo até bastante rápida, com uma taxa de convergência na ordem dos 2.5% ao ano. Isto implica que economias, por exemplo, com apenas metade do rendimento per capita de economias ricas, consigam alcançar o nível de rendimento destas em menos de três décadas.[1]

Empiricamente, não é difícil rejeitar estes três aspectos negativos do modelo de Solow. No sentido de mostrar que os dois últimos pontos negativos podem ser eliminadas, em 1992 três economistas americanos — Gregory Mankiw, David Romer e David Weil, (MRW) [2] — demonstraram que se fosse acrescentado ao modelo de Solow uma nova forma de capital (capital humano), o modelo passaria a poder explicar em larga medida o processo de convergência do rendimento per capita entre os países desenvolvidos e menos desenvolvidos. Este novo modelo passaria a apresentar uma taxa de convergência anual muito mais baixa, e, portanto, muito mais de acordo com a realidade económica ao longo das últimas décadas. Por outro lado, como o capital humano tem adquirido uma importância cada vez maior em recentes décadas, e como o modelo proposto por MRW parece receber apoio significativo em termos empíricos, este modelo tem assumido recentemente uma enorme importância no debate sobre o crescimento económico de longo prazo. Neste capítulo, vamos apresentar e discutir o modelo de MRW e iremos também compará-lo com o de Solow no que diz respeito à convergência económica. No sentido de evitar qualquer confusão que possa resultar da terminologia usada, vamos denominar o modelo de MRW por "modelo neoclássico com capital humano".

5.1 Hipóteses do Modelo

O modelo de capital humano apresentado por MRW continua a assumir como válidas as hipóteses fundamentais do modelo de Solow. Por exemplo, continua a assumir que existem rendimentos decrescentes na acumulação de capital, mesmo que este passe a ser representado por duas formas (física e humana), embora existam rendimentos constantes quando levamos em consideração todos os factores acumuláveis. O conhecimento tecnológico continua também com a mesma característica de bem público, livremente disponível para todos os agentes económicos em todo o mundo; e a força de trabalho e o conhecimento tecnológico continuam a crescer a taxas constantes e exógenas. A única alteração consiste de facto na introdução de uma nova forma de capital (capital humano, o qual iremos designar pelo símbolo H), e, consequentemente, na introdução de uma

[1] A análise desta terceira característica irá ser adiada até ao capítulo onde a probemática da convergência entre as várias economias é discutida. É conveniente apresentar primeiro os vários modelos que pretendem explicar o crescimento económico de longo prazo.

[2] Mankiw, N. G., Romer, D., and Weil, D. (1992). A Contribution to the Empirics of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, 107, 407–437.

nova taxa de poupança de forma a canalizar para este tipo de investimento uma parte do produto (sendo esta taxa designada por s_H). A taxa de poupança total (a soma das duas taxas de poupança: poupança para investimento em capital físico e para capital humano, $s = s_K + s_H$) continua a ser constante e exogenamente determinada na estrutura do modelo.

De forma a tornar as alterações bem claras, e utilizando a mesma linguagem do modelo de Solow, vamos sintetizar as hipóteses fundamentais do modelo com capital humano:

(H0) **(Nova)** Existem duas formas de capital e não apenas uma: capital físico (K) e capital humano (H) que são acumulados ao longo do tempo de forma *endógena*;

(H1) **(Mantem–se)** Existem *rendimentos constantes à escala* relativamente a todos os factores acumuláveis ao longo do tempo, os quais são agora três: capital físico (K), capital humano (H), e trabalho medido em termos de eficiência ($E \equiv A \cdot L$);

(H2) **(Mantem–se)** Existem rendimentos *marginais decrescentes na acumulação de capital*, com a nuance de agora isto se verificar para cada uma das formas de capital (K, H);

(H3) **(Mantem–se)** A força de trabalho (L) cresce a uma taxa constante e *exógena*;

(H4) **(Mantem–se)** O conhecimento tecnológico (A) cresce também a uma taxa constante e *exógena*. Este factor é tido como um bem público, estando livremente disponível (e sem custos) em toda a economia (e mesmo em todo o mundo);

(H5) **(Mantem–se)** A taxa de poupança total (s) é constante, positiva e exógena ($0 < s < 1$), em virtude das taxas de poupança para investimento em cada uma das formas de capital serem também constantes, positivas e exógenas — $0 < s_i < 1$, $i = K, H$, e $0 < (s = s_K + s_H) < 1$;

(H6) **(Mantem–se)** Os mercados do produto e dos factores produtivos funcionam de forma perfeita. Isto implica que não existem lucros extraordinários e os factores produtivos são remunerados de acordo com as suas respectivas produtividades marginais.

Este modelo pretende também dar resposta às *três questões fundamentais* que a análise dinâmica económica investiga, as quais são: (i) Existe equilíbrio de longo prazo? (ii) Caso exista, este equilíbrio é único ou múltiplo?; (iii) O equilíbrio de longo prazo é estável ou instável? Após um choque a economia tem capacidade de regressar ao equilíbrio de longo prazo? Como vimos no capítulo anterior o modelo de Solow apresentava respostas claras sobre estas três questões. Vamos agora verificar se existem alterações nas respostas às mesmas com o modelo de capital humano.

5.2 Apresentação do Modelo

5.2.1 A função de produção

O modelo representa uma economia que produz um bem homogéneo, (Q), a partir de quatro factores produtivos: K (stock de capital físico); H (stock de capital humano); L (população activa); e, A (stock de conhecimento tecnológico), sendo este último considerado *labour augmenting* tal como no modelo de Solow. A função de produção que representa a oferta do modelo é uma função tipo Cobb–Douglas com rendimentos constantes à escala, tendo a forma:

$$Q_t = K_t^{\alpha} H_t^{\beta} \left(A_t L_t\right)^{1-\alpha-\beta} \tag{5.1}$$

com as seguintes restrições relativamente aos parâmetros: $\alpha > 0,\ \ \beta > 0,$ $\alpha + \beta < 1$. Estas restrições implicam dois factos importantes para a dinâmica do modelo. Primeiro, implicam a existência de rendimentos marginais decrescentes relativamente a cada um dos factores produtivos, o que significa que introduzir uma unidade adicional de um factor produtivo no processo de produção provoca um acréscimo da quantidade produzida, mas esses acréscimos tornam–se cada vez menores. Em termos matemáticos esta hipótese pode ser escrita relativamente às primeiras e segundas derivadas parciais do seguinte modo[3]

$$Q_{K}^{'} > 0 \quad , \quad Q_{H}^{'} > 0 \quad , \quad Q_{A}^{'} > 0 \quad , \quad Q_{L}^{'} > 0$$

$$Q_{K}^{''} < 0 \quad , \quad Q_{H}^{''} < 0 \quad , \quad Q_{A}^{''} < 0 \quad , \quad Q_{L}^{''} < 0$$

Segundo, aquelas restrições dos parâmetros levam a que a função de produção (5.1) seja homogénea de grau um, ou seja, a produção apresenta rendimentos constantes à escala relativamente a todos os factores acumuláveis. Verifica-se portanto a condição

$$\lambda Q_t = \left(\lambda K_t\right)^{\alpha} \left(\lambda H_t\right)^{\beta} \left(\lambda A_t L_t\right)^{1-\alpha-\beta}$$

[3]Deve reter que a primeira derivada parcial de Q relativamente a cada um dos argumentos da função é aqui representada por Q_i', enquanto que a segunda derivada por Q_i'',com $i = K, H, A, L$. Por exemplo, $Q_K' = dQ/dK$.

Esta condição significa que um aumento das quantidades dos diferentes factores utilizados na produção numa proporção idêntica (λ) provoca um acréscimo exactamente proporcional da quantidade produzida, isto é, Q_t aumenta também na mesma proporção λ.

Tal como fizemos no modelo de Solow, no sentido de estudar a dinâmica do modelo no longo prazo, torna–se conveniente passar a função de produção apresentada na equação (5.1) para a **forma intensiva**, ou seja, dividindo as diferentes variáveis pelo factor trabalho medido em termos de eficiência (por $E_t \equiv A_t L_t$). Com este procedimento teremos

$$\frac{Q_t}{A_t L_t} = \frac{K_t^{\alpha} H_t^{\beta} \left(A_t L_t\right)^{1-\alpha-\beta}}{A_t L_t}$$

Podemos substituir a expressão $Q_t / A_t L_t$ pela sua notação na forma intensiva ou em termos de eficiência (q_t) e eliminando o termo $\left(A_t L_t\right)^{1-\alpha-\beta}$ do numerador da expressão acima, o resultado será

$$q_t = \frac{K_t^{\alpha}}{\left(A_t L_t\right)^{\alpha}} \frac{H_t^{\beta}}{\left(A_t L_t\right)^{\beta}}$$

Finalmente, é possível substituir os dois termos do lado direito da equação anterior por variáveis medidas na forma intensiva, ficando

$$q_t = k_t^{\alpha} h_t^{\beta} \tag{5.2}$$

onde são utilizadas as seguintes definições

$q_t \equiv \dfrac{Q_t}{A_t L_t}$	,	produto por unidade de trabalho eficiente
$k_t \equiv \dfrac{K_t}{A_t L_t}$	,	capital físico por unidade de trabalho eficiente
$h_t \equiv \dfrac{H_t}{A_t L_t}$	,	capital humano por unidade de trabalho eficiente

Ao passarmos a função de produção (5.1) para a sua forma intensiva, conseguimos que todas as variáveis que a compõem apareçam também elas medidas em termos de trabalho eficiente, o que acaba por simplificar a função de produção (em vez de ter cinco variáveis, passa a ter apenas quatro) o que é extremamente útil para o estudo do comportamento dinâmico do modelo.

5.2.2 O comportamento da procura de B&S

A afectação do rendimento na procura de bens e serviços (Q_t) nesta economia segue o modelo de Solow e é dada pela equação

$$Q_t \equiv C_t + S_t \tag{5.3}$$

onde C_t é o nível do consumo e S_t o nível da poupança. Esta equação básica diz–nos simplesmente que a parte do rendimento que não é consumida é poupada. Uma outra equação que é fundamental no lado da procura, e que é crucial para os resultados do modelo, consiste na hipótese da poupança ser *automaticamente* canalizada para investimento, independentemente do nível da actividade económica, do nível da poupança, do nível do investimento, ou de qualquer outra variável económica. Isto é, em qualquer ano t a seguinte equação verificar–se–á sempre

$$S_t \equiv I_t \tag{5.4}$$

Note que neste modelo, e contrariamente ao modelo de Solow, temos agora duas formas de investimento — investimento em capital físico $\left(I_t^K\right)$ e investimento em capital humano $\left(I_t^H\right)$ — então teremos

$$S_t \equiv I_t^K + I_t^H \tag{5.5}$$

A função consumo que consideramos no modelo é uma função convencional e igual à do modelo de Solow, isto é o consumo depende positivamente do nível do rendimento ou do produto

$$C_t = b \cdot Q_t = (1 - s) \cdot Q_t \tag{5.6}$$

sendo b a propensão marginal ao consumo e s a propensão marginal a poupar em termos agregados, $0 < b < 1$, e $b + s = 1$. No entanto note que, neste modelo, a propensão marginal a poupar em termos agregados (ou total) é dada pela soma das propensões para investimento físico e investimento humano, ou seja $s = s_K + s_H$, de onde podemos reescrever a função consumo da seguinte forma

$$C_t = \left[1 - (s_K + s_H)\right] Q_t \tag{5.7}$$

Utilizando as equações (5.3) e (5.4) podemos obter a seguinte equação

$$Q_t \equiv C_t + \underbrace{s_K \cdot Q_t + s_H \cdot Q_t}_{I_t} \tag{5.8}$$

Usando esta equação juntamente com a equação (5.7) obter–se–á as funções de investimento (bruto) para cada uma das formas em que o capital é acumulado

$$I_t^K = s_K \cdot Q_t \tag{5.9}$$
$$I_t^H = s_H \cdot Q_t \tag{5.10}$$

Cada uma das formas de investimento bruto é, portanto, proporcional ao produto (também em termos brutos) sendo a sua parcela determinada por cada uma das taxas de poupança s. Portanto, o investimento total corresponde a uma proporção da procura (dada pela taxa de poupança, $s = s_K + s_H$), sendo o resto destinado a consumo privado. Daqui podemos concluir que a oferta é integralmente absorvida pela procura: procura para consumo privado, procura para investimento em capital físico, e procura para investimento em capital humano. Esta conclusão resulta fundamentalmente da hipótese que referimos acima de que em termos *ex ante* o investimento é sempre automaticamente igual à poupança.

5.2.3 A evolução dos factores produtivos no tempo

O modelo assume também um conjunto de hipóteses explícitas do lado da oferta. Em relação aos factores produtivos temos que os níveis iniciais de capital físico, capital humano, trabalho e progresso tecnológico são dados e são todos positivos, isto é, no período $t = 0$ teremos

$$K_0 > 0 \;, \quad H_0 > 0 \;, \quad L_0 > 0 \;, \quad A_0 > 0$$

É também assumido neste modelo que destes quatro factores produtivos, dois deles, o trabalho e o progresso tecnológico crescem a taxas *constantes e exógenas* dadas respectivamente por n e m :

$$\dot{L}_t = n \cdot L_t \quad , \quad n > 0 \tag{5.11}$$

$$\dot{A}_t = m \cdot A_t \quad , \quad m > 0 \tag{5.12}$$

Relativamente aos restantes dois factores produtivos (K) e (H), o modelo assume que os mesmos são acumulados de forma *endógena* de acordo com os seguintes comportamentos :

$$\dot{K}_t = \underbrace{I_t^K}_{s_K \cdot Q_t} - \delta_K \cdot K_t = s_K \cdot Q_t - \delta_K \cdot K_t \tag{5.13}$$

$$\dot{H}_t = \underbrace{I_t^H}_{s_H \cdot Q_t} - \delta_H \cdot H_t = s_H \cdot Q_t - \delta_H \cdot H_t \tag{5.14}$$

verificando–se as seguintes restrições convencionais nas taxas de poupança (s_K, s_H) e nas taxas de amortização do capital (δ_K, δ_H) :

$$\begin{aligned} 0 &< s_K < 1 \;\;,\;\; 0 < \delta_K < 1 \\ 0 &< s_H < 1 \;\;,\;\; 0 < \delta_H < 1 \end{aligned}$$

A natureza endógena do comportamento das duas formas de capital resulta do facto de uma parcela do produto ser poupada e canalizada para investimento. Como existem aqui duas formas de investimento (material e humano), teremos uma parcela da poupança dedicada à acumulação de capital físico (a parcela $s_K \cdot Q_t$) e outra à acumulação de capital humano (a parcela $s_H \cdot Q_t$). Como as taxas de poupança são constantes e positivas, os factores produtivos K_t e H_t surgem como duas variáveis endógenas do modelo, cujo comportamento dinâmico estudaremos de seguida.

5.3 O Equilíbrio de Longo Prazo (ELP)

Das três grandes questões a que o modelo deve dar resposta no que diz respeito à natureza do equilíbrio de longo prazo — e que como vimos acima são as seguintes: *existência*, *unicidade* e *estabilidade* — vamos encontrar nesta secção as respostas às primeiras duas.

O modelo de crescimento económico desenvolvido por Mankiw, Romer and Weil (1992) pode ser descrito pelas equações da tabela seguinte:[4]

$Q_t = K_t^{\alpha} H_t^{\beta} \left(A_t L_t\right)^{1-\alpha-\beta}$	,	a função de produção
$\dot{K}_t = s_K \cdot Q_t - \delta_K \cdot K_t$	,	a variação do capital físico
$\dot{H}_t = s_H \cdot Q_t - \delta_H \cdot H_t$	,	a variação do capital humano
$\dot{L}_t = n \cdot L_t \Leftrightarrow \dfrac{\dot{L}_t}{L_t} = n$	,	a variação do trabalho
$\dot{A}_t = m \cdot A_t \Leftrightarrow \dfrac{\dot{A}_t}{A_t} = m$	,	a variação do progresso tecnológico

[4] Existem ainda duas outras equações que fazem parte do modelo mas que não estão na caixa acima. Estas são o consumo, $C_t = b \cdot Q_t$, e a igualdade automática entre o consumo e o investimento $I_t = S_t$. No entanto estas duas equações estão presentes na função investimento acima apresentada. Portanto, o modelo pode de facto ser resumido pelas cinco equações acima referidas.

O estudo do comportamento dinâmico de um modelo com quatro equações dinâmicas pode ser complicado e maçador, sendo as quatro equações relativas a $\dot{K}_t$, $\dot{H}_t$, $\dot{A}_t$, e $\dot{L}_t$. No entanto, este estudo pode ser drasticamente simplificado se conseguirmos reduzir o mesmo a um pequeno número (o menor número possível) de equações de movimento.

No modelo de Solow conseguimos reduzir a dinâmica do mesmo a uma única equação diferencial. Isto não será possível neste modelo em virtude do mesmo possuir dois tipos de capital, os quais são duas variáveis endógenas. No entanto, isto não representa qualquer problema significativo, já que a utilização da mesma técnica aplicada no modelo de Solow (a de reduzir ao mínimo o número de equações dinâmicas) nos irá dar apenas duas equações diferenciais. O estudo da estabilidade de um sistema dinâmico de duas equações em termos gráficos é relativamente fácil, como irá verificar.

As duas equações de movimento às quais o modelo irá ser reduzido são uma para k_t e outra para h_t, sendo estas definidas da seguinte forma: $k_t \equiv K_t/A_tL_t$, $h_t \equiv H_t/A_tL_t$.

5.3.1 A dinâmica de k_t

Sendo o stock de capital físico por unidade de trabalho eficiente dado por

$$k_t \equiv \frac{K_t}{A_tL_t} \equiv \frac{K_t}{E_t} \tag{5.15}$$

com $E_t \equiv A_tL_t$. O nosso objectivo é saber como k_t se comporta ao longo do tempo, isto é, que forças afectarão $\dot{k}_t$?

Por definição, a variação de k_t é dada pela sua derivada relativamente a t, ou seja, por $\dot{k}_t \equiv dk_t/dt$. Esta derivada total, por sua vez, corresponde ao esquema apresentado na *Figura 5.1*, e a sua derivação é perfeitamente igual àquela que foi explicada no modelo de Solow. A única alteração consiste em que no modelo que estamos a apresentar neste capítulo, a função de produção na forma intensiva tem duas variáveis explicativas (k, h) em vez de apenas uma (k). Reproduzimos aqui mais uma vez a sua derivação para que a mesma seja aprendida sem quaisquer reservas

$$\dot{k}_t = \frac{\partial k_t}{\partial K_t}\frac{dK_t}{dt} + \frac{\partial k_t}{\partial E_t}\frac{dE_t}{dt} \tag{5.16}$$

Calculando as derivadas parciais da equação (5.15) e sabendo por definição que $\frac{dK_t}{dt} \equiv \dot{K}_t$ e $\frac{dE_t}{dt} \equiv \dot{E}_t$ podemos reescrever a equação (5.16)

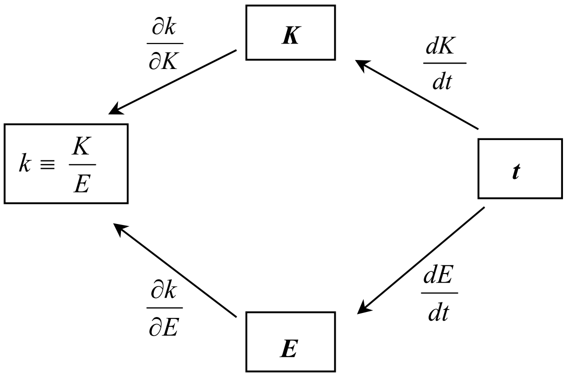

Figura 5.1: *Esquema gráfico da derivada total de k relativamente a t.*

como [5]

$$\dot{k} = \frac{1}{E}\dot{K} + \left(-\frac{K}{E^2}\dot{E}\right) \tag{5.17}$$

Da expressão (5.13), que nos dá a evolução do capital físico ao longo do tempo, sabemos que $\dot{K}_t = s_K Q_t - \delta_K K_t$. Substituindo esta expressão na equação (5.17) e compondo o seu último termo, podemos reescrevê–la

$$\dot{k} = \frac{s_K Q}{E} - \frac{\delta_K K}{E} - \frac{K}{E}\frac{\dot{E}}{E} \tag{5.18}$$

Por definição sabemos que $Q_t/E_t \equiv q_t$, ou seja, q_t corresponde à produção apresentada em termos intensivos (ou por trabalhador eficiente), e também que K_t/E_t é o capital físico apresentado em termos de trabalhador eficiente (k_t). Por outro lado, sabemos que $\dot{E}_t/E_t$ é a taxa de crescimento de E, a qual iremos designar por g_E e que corresponde à soma das taxas de crescimento do trabalho (g_L) e do progresso tecnológico (g_A), logo, $\dot{E}_t/E_t = g_E = g_A + g_L = n + m$. Substituindo estes resultados na expressão (5.18) teremos

$$\dot{k} = s_K \cdot q - (n + m + \delta_K)k \tag{5.19}$$

Introduzindo a equação (5.2) $q_t = k_t^\alpha h_t^\beta$ na expressão anterior, esta ficará

$$\dot{k} = s_K \left(k^\alpha h^\beta\right) - (n + m + \delta_K)k \tag{5.20}$$

A equação (5.20) restabelece os resultados do modelo de Solow, ou seja, o capital físico em termos intensivos varia sempre que o investimento

[5] De forma a simplicar a exposição vamos tentar omitir o índice do tempo (t) nas expressões seguintes. No entanto, sempre que seja vantajoso, este índice será apresentado nas equações com o objectivo de evitar possíveis confusões.

em capital físico por trabalhador eficiente (a parcela $s_K k_t^\alpha h_t^\beta$) diferir da necessidade de reposição desse mesmo capital, necessidade aqui imposta pelo crescimento populacional e pelo crescimento do progresso tecnológico (correspondendo à parcela $(n + m + \delta_K)k$). Podemos sintetizar o comportamento dinâmico do capital físico por unidade de trabalho eficiente na seguinte caixa

$\dot{k}_t > 0$	$\Longrightarrow$	k_t está a aumentar
$\dot{k}_t < 0$	$\Longrightarrow$	k_t está a diminuir
$\dot{k}_t = 0$	$\Longrightarrow$	k_t permanece constante

Donde se pode concluir que o equilíbrio de longo prazo da variável k_t será obtido quando $\dot{k}_t = 0$, ou seja, quando o capital físico por unidade de trabalho eficiente parar de crescer ou de decrescer. Portanto, igualando a zero a equação (5.20) teremos

$$s_K k^\alpha h^\beta - (n + m + \delta_K)k = 0 \tag{5.21}$$

Pondo k em evidência, a equação pode ser resolvida em ordem a esta variável obtendo–se uma relação funcional entre k_t e h_t que garante que $\dot{k}_t = 0$

$$k_t = \left(\frac{s_K}{n + m + \delta_K}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot h_t^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \tag{5.22}$$

Da hipótese assumida pelo modelo e apresentada na equação (5.1) de que $\alpha + \beta < 1$, resulta que $\beta < 1 - \alpha$. Com esta relação, o expoente de h_t na equação (5.22) será inferior a 1, levando a que esta função apresente uma curvatura côncava. A equação (5.22) está representada graficamente na *Figura 5.2*. Nesta apresentam-se as combinações de k_t e h_t que satisfazem a condição $\dot{k}_t = 0$, isto é, que garantem que o capital físico, medido em termos de eficiência, se encontre numa trajectória (ou estado) de equilíbrio de longo prazo. Portanto, todos os pontos situados *sobre a função* $\dot{k}_t = 0$ são pontos que descrevem uma situação em que k_t não cresce nem decresce ao longo do tempo. Utilizando a *Figura 5.2*, suponha que a economia tem num determinado momento do tempo um stock de capital humano por trabalhador eficiente com o nível h_0. Para este nível de h_t, e de forma a que o stock de capital físico permaneça constante ao longo do tempo, isto é para que $\dot{k}_t = 0$, o nível de k_t terá que ser igual a $k^\star$.

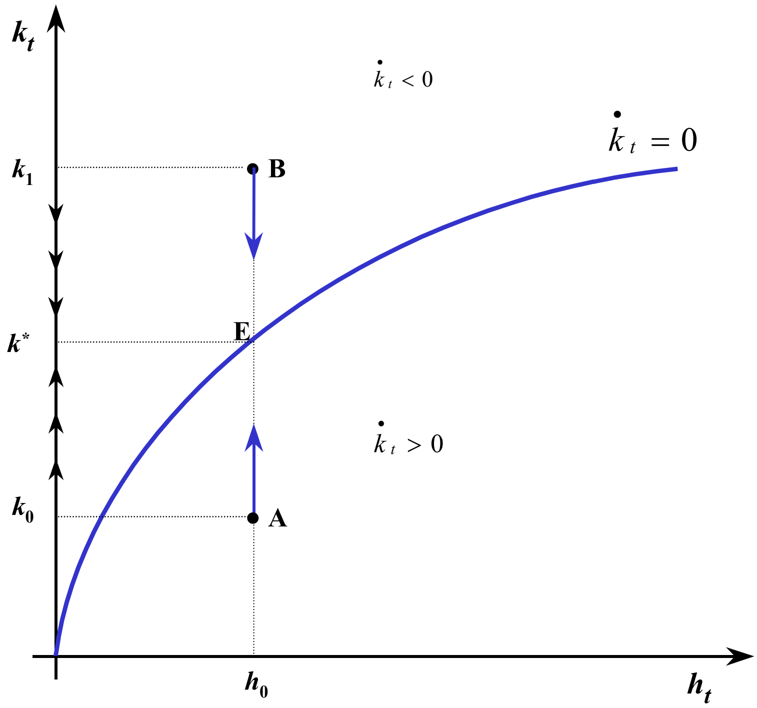

Figura 5.2: A DINÂMICA DO CAPITAL FÍSICO POR UNIDADE DE TRABALHO EFICIENTE (k_t).

Por outro lado, pontos situados acima ou abaixo da função (5.22) são pontos de desequilíbrio para k_t. Isto significa que, no longo prazo, o capital físico por unidade de trabalho eficiente está a decrescer ($\dot{k}_t < 0$) ou a crescer ($\dot{k}_t > 0$). Tomando como exemplo o ponto B na referida figura, onde os stocks de capital que a economia tem num determinado ano são dados pelo par (k_1, h_0), vemos que o valor assumido pela variável k_t é superior ao seu valor de equilíbrio de longo prazo $k^\star$, isto é, é superior àquele que seria necessário para manter o capital físico por unidade de trabalho eficiente numa trajectória de equilíbrio de longo prazo (que seria dado no ponto E com $k_t = k^\star$). Então, como para h_0, $k_1 > k^\star$, o capital físico medido em termos de eficiência irá decrescer ao longo do tempo até alcançar o valor $k^\star$, e quando tiver alcançado este valor entra e manter–se–á na sua trajectória de equilíbrio de longo prazo. Este processo dinâmico do decréscimo de k_t, de k_1 para $k^\star$, pode ser visto na *Figura 5.2* como o movimento da economia (ao longo do tempo) do ponto B para o ponto E. Portanto, pontos *acima* da função (5.22) são pontos onde se verifica $\dot{k}_t < 0$, indicando que k_t irá decrescer até atingir um ponto sobre a curva para cada valor de h.

Finalmente, pares de capital físico e de capital humano (ambos medidos em termos de eficiência) situados *abaixo* da trajectória de equilíbrio de longo prazo de k_t representam situações em que o capital físico por unidade de trabalho eficiente está a crescer ($\dot{k}_t > 0$). No ponto A, onde a economia inicia o processo de acumulação de capital com o par (k_0, h_0), o capital físico em termos de trabalho eficiente é inferior ao montante que manteria k_t na sua trajectória de equilíbrio de longo prazo. Sendo $k_0 < k^\star$, então k_t vai começar a crescer até alcançar a sua trajectória de equilíbrio de longo prazo, dada pelo ponto E, onde $k_t = k^\star$.

Conclui–se, portanto, que existe uma trajectória de equilíbrio de longo prazo para k_t e que, independentemente do seu ponto de partida (acima ou abaixo dessa trajectória), a economia converge para aquela trajectória. Repare que esta conclusão diz respeito apenas ao comportamento dinâmico de k_t, faltando analisar o comportamento de h_t.

5.3.2 A dinâmica de h_t

O capital humano por unidade de trabalho eficiente é dado ao longo do tempo por

$$h_t \equiv \frac{H_t}{A_t L_t} \equiv \frac{H_t}{E_t} \tag{5.23}$$

À semelhança da análise do capital físico, a evolução desta variável h_t corresponde à sua derivada total relativamente ao tempo, isto é, $\dot{h}_t \equiv$

dh_t/dt. Esta derivada pode ser escrita como

$$\dot{h}_t = \frac{\partial h_t}{\partial H_t}\frac{dH_t}{dt} + \frac{\partial h_t}{\partial E_t}\frac{dE_t}{dt} \tag{5.24}$$

Calculando as derivadas parciais da equação (5.23) e sabendo por definição que $\frac{dH_t}{dt} \equiv \dot{H}_t$ e $\frac{dE_t}{dt} \equiv \dot{E}_t$, a equação (5.24) pode ser escrita da seguinte forma (omitindo o índice t como habitualmente)

$$\dot{h} = \frac{1}{E}\dot{H} + \left(-\frac{H}{E^2}\dot{E}\right) \tag{5.25}$$

Utilizando a equação (5.14) que nos dá a evolução do factor produtivo capital humano, $\dot{H}_t = s_{H}Q_t - \delta_{H}H_t$, substituindo–a na equação (5.25) e rearranjando ainda o último termo dessa mesma equação, teremos

$$\dot{h} = \frac{s_{H}Q}{E} - \frac{\delta_{H}H}{E} - \frac{H}{E}\frac{\dot{E}}{E} \tag{5.26}$$

Como por definição $Q_t/E_t \equiv q_t$, e $H_t/E_t \equiv h_t$, e como $\dot{E}_t/E_t$ corresponde à taxa de crescimento de E_t, a qual iremos designar por g_{E} e que corresponde à soma das taxas de crescimento do trabalho (g_{L}) e do progresso tecnológico (g_{A}), logo, $\dot{E}_t/E_t = g_{E} = g_{A} + g_{L} = n + m$. Isto permite–nos reescrever a equação (5.26) como

$$\dot{h} = s_{H} \cdot q - (n + m + \delta_{H})h \tag{5.27}$$

Utilizando a equação (5.2), que nos dá a expressão da função de produção em termos intensivos, ficamos com uma nova expressão

$$\dot{h} = s_{H}\left(k^{\alpha}h^{\beta}\right) - (n + m + \delta_{H})h \tag{5.28}$$

A partir desta equação podemos concluir que sempre que o investimento em termos intensivos em capital humano não coincidir com a necessidade de reposição desse mesmo capital humano (também por unidade de trabalho eficiente), este estará a crescer ou a decrescer. O comportamento dinâmico da variável capital humano em termos intensivos pode ser sintetizado na seguinte caixa

$\dot{h}_t > 0$	$\Longrightarrow$	h_t está a aumentar
$\dot{h}_t < 0$	$\Longrightarrow$	h_t está a diminuir
$\dot{h}_t = 0$	$\Longrightarrow$	h_t permanece constante

O equilíbrio de longo prazo desta variável obtém-se, portanto, quando $\dot{h}_t = 0$, quando o capital humano medido em termos de eficiência parar de crescer ou de decrescer. Igualando a zero a equação (5.28), resulta

$$s_H \left(k^\alpha h^\beta\right) = (n + m + \delta_H)h \tag{5.29}$$

Resolvendo em ordem a k teremos uma expressão para a trajectória de equilíbrio de longo prazo de h, ou seja de $\dot{h} = 0$, que será dada por

$$k_t = \left(\frac{n + m + \delta_H}{s_H}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot h_t^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \tag{5.30}$$

Note que na equação (5.30) o expoente de h_t é superior à unidade, isto é, $(1-\beta)/\alpha > 1$, em virtude de se assumir a hipótese $\alpha + \beta < 1$ relativamente à função de produção (5.1). Assim, a função (5.30) apresenta uma curvatura convexa conforme *Figura 5.3.* A função representada neste gráfico corresponde aos valores de k_t e h_t que nos dão o stock de capital humano, medido em termos de eficiência, de equilíbrio de longo prazo ($\dot{h}_t = 0$). Portanto, os pontos situados *sobre* aquela função correspondem a todos os pares (k_t, h_t) que nos garantem que h_t não cresce nem decresce ao longo do tempo.

Todos os pares (k_t, h_t) situados à esquerda da trajectória de equilíbrio de longo prazo de h_t representam situações em que o capital humano por unidade de trabalho eficiente está a crescer ($\dot{h}_t > 0$). Por exemplo, no ponto A onde a economia inicia o seu processo de acumulação de capital com o par (k_0, h_0), o valor de h_t é inferior ao seu valor de equilíbrio de longo prazo, o qual é dado por $h_t = h^\star$. Este é o valor que seria necessário para manter h_t na sua trajectória de equilíbrio de longo prazo, para um stock de capital físico (em termos de eficiência) igual a k_0. Em consequência, a variável h_t irá crescer ao longo do tempo até alcançar o valor $h_t = h^\star$, e quando tiver alcançado este valor manter–se–á na sua trajectória de equilíbrio de longo prazo, isto é manter–se–á constante. O processo dinâmico que descreve este ajustamento da variável h_t pode ser visto como o movimento da economia de A para E na *Figura 5.3.* O ponto E, uma vez alcançado, reflecte o valor que h_t irá assumir no longo prazo.

Pares (k_t, h_t) situados à direita da trajectória de equilíbrio de longo prazo da variável h_t, representam situações em que o capital humano por unidade de trabalho eficiente estará a decrescer ($\dot{h}_t < 0$). Considerando o par (k_0, h_1), como o nível de h_t é superior ao seu valor de equilíbrio de longo prazo, o capital humano medido em termos de eficiência vai começar a decrescer até alcançar a sua trajectória de equilíbrio de longo prazo, onde irá depois permanecer constante ao longo do tempo. Este processo é mostrado na *Figura 5.3* pelo deslocamento da economia dos

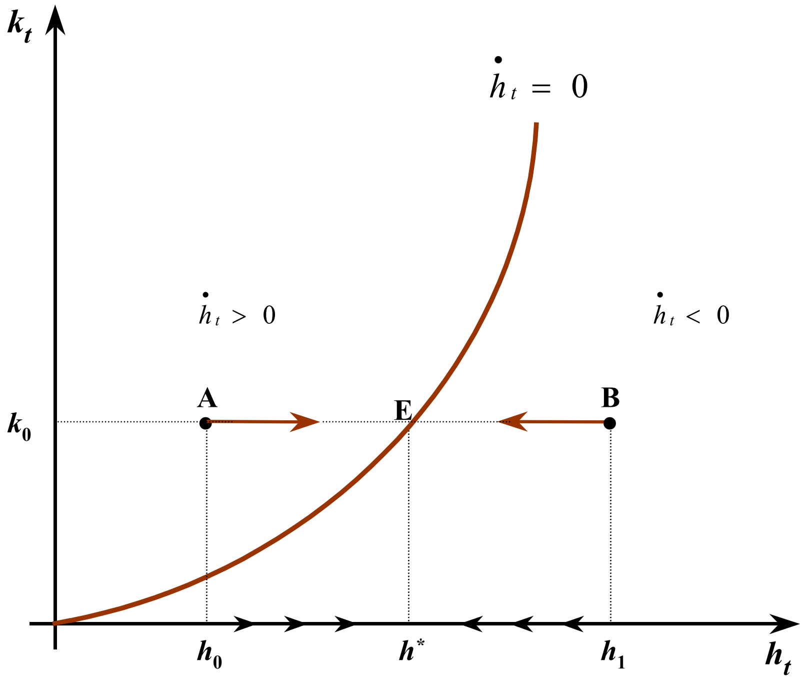

Figura 5.3: A DINÂMICA DO CAPITAL HUMANO POR TRABALHADOR EFICIENTE (h_t).

pontos B para E. Este último ponto reflecte o nível de equilíbrio de h_t de longo prazo.

À semelhança do que acontece com o capital físico em termos eficientes, existe uma trajectória de equilíbrio para h_t e as forças do modelo garantem que a economia converge para esta trajectória qualquer que seja a situação de partida.

5.3.3 O equilíbrio de longo prazo da economia

O ponto de equilíbrio da economia como um todo será aquele em que ambos os tipos de capital se encontrem nas suas respectivas trajectórias de equilíbrio de longo prazo. Será, portanto, uma situação em que se verifique

$$\begin{aligned} \dot{k}_t &= 0 \\ \dot{h}_t &= 0 \end{aligned}$$

O equilíbrio que resulta desta condição pode ser determinado através de dois métodos: em termos gráficos, e em termos algébricos. Vamos começar com a análise gráfica porque o estudo da estabilidade do modelo em termos gráficos é imediato e mais fácil no caso de duas equações dinâmicas. Depois no estudo algébrico, não iremos estudar a problemática da estabilidade (pois esta já está estudada em termos gráficos), iremos apenas determinar os valores de equilíbrio de longo prazo de k_t e h_t, ou seja, os valores de $k^\star$ e $h^\star$.

Análise gráfica

Em termos gráficos o equilíbrio de longo prazo da economia corresponderá ao ponto de intersecção de ambas as trajectórias de equilíbrio como se pode observar na *Figura 5.4.* O ponto E corresponde assim ao equilíbrio de longo prazo do modelo. Note–se que existe apenas um par de valores para capital físico e capital humano (ambos por unidade de trabalho eficiente) que nos dão o equilíbrio de longo prazo deste sistema económico dinâmico, o par denotado por $(k^\star, h^\star)$. Podemos então dar uma resposta afirmativa à nossa primeira questão. No modelo de crescimento com capital humano existe equilíbrio e este equilíbrio é único. Portanto temos a primeira conclusão:

Conclusão 5.1 *O equilíbrio de longo prazo no modelo de capital humano existe e é único.*

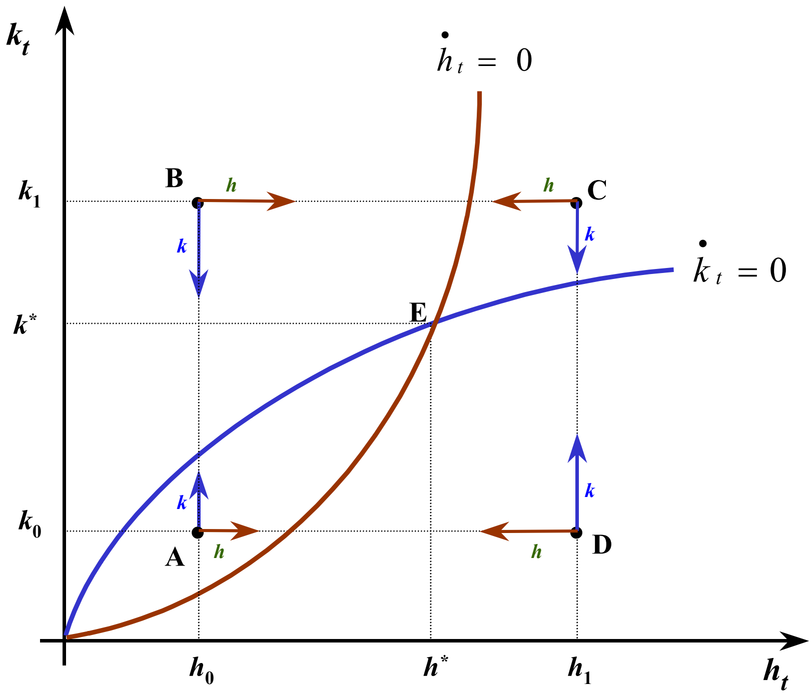

Figura 5.4: O equilíbrio de longo prazo do modelo. *A dinâmica simultânea de k_t e h_t representada numa figura como esta é denominada por "plano ou diagrama de fases".*

A segunda interrogação que se coloca na análise de um sistema económico dinâmico é saber se o equilíbrio é estável ou instável. Perante uma perturbação de natureza exógena, que leve a economia para fora da sua trajectória de equilíbrio de longo prazo, existem mecanismos internos ao modelo capazes de reconduzir a economia para uma nova situação de equilíbrio de longo prazo?

O nosso problema consiste, portanto, em saber se no caso da economia não se encontrar sobre este ponto de equilíbrio à partida, será que existirão forças no modelo que nos garantam que a economia convergirá para E? Para dar resposta a esta questão vamos analisar quatro casos que representam situações iniciais de desequilíbrio dinâmico na economia. Estas quatro situações são representadas pelos pontos A, B, C e D na *Figura 5.4.* No sentido de perceber a reacção dinâmica da economia à situação de desequilíbrio inicial, é importante observar com cuidado o sentido das setas representadas na referida figura.

O primeiro caso que vamos analisar corresponde a uma situação em que, quer o capital físico quer o capital humano, ambos em termos de trabalhador eficiente, se encontram abaixo do par $(k^\star, h^\star)$ que corresponde ao ponto A, onde se verifica o par $(k_t < k^\star, h_t < h^\star)$. Repare-se que a variável k_t se encontra abaixo da sua trajectória de equilíbrio de longo prazo, portanto, está a crescer, enquanto a variável h_t estará á esquerda da sua trajectória de equilíbrio de longo prazo estando também a crescer. Ora, como ambas as variáveis estão a crescer ao longo do tempo, vão acabar por convergir para os valores de equilíbrio de longo prazo $(k^\star, h^\star)$, garantindo assim que a economia alcança o ponto E.

Em segundo lugar, considere-se uma situação em que k_t e h_t estão ambos acima dos montantes correspondentes ao equilíbrio de longo prazo da economia $(k_t > k^\star,\ h_t > h^\star)$, o que acontece por exemplo no ponto C. Este par corresponde a um ponto situado acima da trajectória de equilíbrio de longo prazo de k_t, o que significa que esta variável estará a decrescer (observe-se o sentido da seta), e situado à direita da trajectória de equilíbrio de longo prazo de h_t, que significa que esta variável também estará a decrescer (veja-se o sentido da seta que diz respeito à trajectória de h_t neste quadrante). O facto de as duas variáveis decrescerem ao longo do tempo garante a convergência da economia para o ponto de equilíbrio de longo prazo (E).

Como terceira situação, considere-se o caso em que o capital físico por unidade de trabalho eficiente é superior ao seu valor de equilíbrio de longo prazo $(k_t > k^\star)$, mas o capital humano por unidade de trabalho eficiente é inferior ao seu valor de equilíbrio de longo prazo $(h_t < h^\star)$. Isto verifica–se no ponto B. Neste caso, a variável k_t estará assim acima da sua trajectória de equilíbrio de longo prazo e, portanto, estará a decrescer ao longo do tempo até alcançar o montante de equilíbrio de longo prazo ($k^\star$). A variável h_t estará situada à esquerda da sua trajectória de equilíbrio de longo prazo o que significa que estará a crescer, tendendo para o valor $h^\star$. Este processo de transição subsiste até que a economia alcance o ponto de equilíbrio de longo prazo, no qual os montantes dos dois tipos de capitais serão dados pelo par $(k^\star, h^\star)$.

O quarto e último caso analisado é aquele em que o capital físico por unidade de trabalho eficiente é inferior ao montante que equilibra a economia ($k_t < k^\star$), enquanto o capital humano por unidade de trabalho eficiente é superior ao montante de equilíbrio de longo prazo da economia ($h_t > h^\star$). Isto verifica–se no ponto D. Se k_t está abaixo da sua trajectória de equilíbrio de longo prazo, está a crescer, aproximando-se de $k^\star$. Por outro lado, h_t está situado à direita da sua trajectória de equilíbrio de longo prazo e, portanto, começa a decrescer, aproximando-se de $h^\star$. O movimento combinado destas duas variáveis garante a convergência da economia para o ponto de equilíbrio de longo prazo (E), onde os montantes de capital físico e de capital humano, ambos medidos em termos de eficiência, são dados por $(k^\star, h^\star)$.

O ponto E é assim um ponto de estabilidade, na medida em que independentemente da situação de partida a economia converge para aquele ponto. Uma vez alcançado, e se não se derem choques de natureza exógena (epidemias, terramotos, etc.), ele manter–se–á em vigor ao longo do tempo, pois não existem forças no modelo que afastem a economia deste ponto. Podemos agora dar resposta à segunda questão colocada no início desta secção. No modelo de crescimento com capital humano existe estabilidade do equilíbrio de longo prazo, já que, se a economia se afastar temporariamente da trajectória de equilíbrio de longo prazo ou se começar o processo de acumulação de capital em qualquer um dos quatro casos analisados, o próprio funcionamento do sistema encarregar–se–á de a fazer regressar/alcançar a sua trajectória de equilíbrio de longo prazo.

Portanto, temos agora a segunda grande conclusão do modelo de capital humano:

Conclusão 5.2 *O equilíbrio de longo prazo do modelo é estável, já que independentemente do ponto de partida, a economia converge para uma trajectória de crescimento equilibrado. E como iremos verificar na próxima secção, este equilíbrio não é apenas estável, é também "robusto", já que mesmo alterações em parâmetros fundamentais do modelo não alteram o tipo de estabilidade do modelo no longo prazo.*

Análise algébrica

★★ Não iremos estudar aqui a problemática da estabilidade, pois esta já está estudada em termos gráficos na secção anterior. Vamos apenas determinar os valores de equilíbrio de longo prazo de k_t e h_t, ou seja, os valores de $k^\star$ e $h^\star$.

Para determinar estes valores devemos utilizar as mesmas condições de equilíbrio de longo prazo, ou seja $\dot{k}_t = 0$ e $\dot{h}_t = 0$. Como vimos a primeira condição é dada pela equação (5.22), a qual era dada pela expressão

$$k_t = \rho^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} \cdot h_t^{\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)}$$

utilizando a seguinte simplificação: $\rho = s_K / (n + m + \delta_K)$. Por sua vez, a segunda condição era dada pela equação (5.27), tendo a seguinte expressão

$$k_t = \sigma^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \cdot h_t^{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}$$

com a simplificação $\sigma = (n + m + \delta_H) / s_H$.

Igualando as duas equações obtemos de forma imediata os valores de equilíbrio de longo prazo para o capital físico e para o capital humano, ambos por trabalhador eficiente, cujos valores correspondem ao ponto E da *Figura 5.4.* Estes valores são dados pelas seguintes expressões

$$k^\star = \rho^{\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}\right)} \cdot \sigma^{\left(-\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\right)} \tag{5.31}$$

$$h^\star = \rho^{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\right)} \cdot \sigma^{\left(-\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}\right)} \tag{5.32}$$

sendo conveniente lembrar que utilizámos as definições: $\rho = s_K / (n + m + \delta_K)$ e $\sigma = (n + m + \delta_H) / s_H$.

Como podemos verificar, estas expressões contêm apenas parâmetros no lado direito, pelo que as mesmas representam a solução do modelo para cada uma das variáveis que estamos a considerar para determinar o equilíbrio de longo prazo do modelo. Ou seja, elas representam as duas formas reduzidas do modelo.

Note que se fizermos $\beta = 0$ e $s_H = 0$, teremos de facto os resultados do modelo de Solow. Neste caso, como não existe poupança para acumulação em capital humano, não existe capital humano, e consequentemente o modelo reduz–se apenas à primeira equação de equilíbrio acima (5.31) em termos do equilíbrio de longo prazo, vindo a mesma dada por $k^\star = \rho^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{s_K}{n+m+\delta_K}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.[6] ■■

[6] Como poderá facilmente verificar este é o resultado do equilíbrio do modelo de Solow para a variável k_t.

5.4 Caracterização do Crescimento no ELP

Quando a economia alcançar o seu equilíbrio de longo prazo (ELP), ou seja quando tiver alcançado o ponto E, teremos o capital físico e o capital humano, *ambos em termos de trabalho eficiente*, a crescerem a taxas nulas, em virtude deste equilíbrio ser determinado, como sabemos, a partir das condições $\dot{k}_t = 0$ e $\dot{h} = 0$.

A taxa de crescimento do capital físico resultará de $\dot{k}_t = 0$ o que implica que $\dot{k}_t / k_t = 0$, logo

$$\boxed{g_k = 0}$$

Por sua vez, a taxa de crescimento do capital humano em termos eficientes resulta da condição $\dot{h}_t = 0$, o que implica que $\dot{h}_t / h_t = 0$ e assim

$$\boxed{g_h = 0}$$

Como se comportam as restantes variáveis endógenas? Sabemos que o seu crescimento terá de ser compatível com o equilíbrio estacionário (ou seja, o equilíbrio de longo prazo). O crescimento do produto por unidade de trabalho eficiente pode ser calculado a partir da função de produção apresentada na forma intensiva. Assim, sabendo que $q_t = k_t^{\alpha} h_t^{\beta}$, podemos calcular o crescimento de q_t que terá necessariamente de resultar de $g_q = \alpha g_k + \beta g_h$. Substituindo g_k e g_h pelos valores já calculados, teremos $g_q = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0$. Daqui resultando

$$\boxed{g_q = 0}$$

Portanto, e em termos de conclusão, comprovamos que as variáveis intensivas do modelo não crescem quando se alcança o equilíbrio de longo prazo.

Vamos agora debruçarmo-nos sobre o crescimento das variáveis medidas em valores absolutos. Sabendo que o capital físico em termos absolutos corresponde a $K \equiv k\,(AL)$, a sua taxa de crescimento será dada por $g_K = g_k + g_A + g_L$. Substituindo cada uma destas taxas pelos seus valores que são já conhecidos, teremos $g_K = 0 + m + n$. Donde finalmente resulta

$$\boxed{g_K = n + m}$$

A taxa de crescimento do capital humano em termos absolutos, e sabendo que este corresponde a $H \equiv h\,(AL)$, será $g_H = g_h + g_A + g_L$. Substituindo as diferentes taxas pelos seus valores ficamos com $g_H = 0 + m + n$. O que finalmente nos permite chegar à taxa de crescimento do capital humano que corresponderá a

$$\boxed{g_H = n + m}$$

A taxa de crescimento do produto em termos absolutos será determinada a partir do mesmo procedimento. No entanto, vamos utilizar um outro método, o qual é totalmente equivalente àquele que já conhece. Sabendo que $Q_t = K_t^\alpha H_t^\beta (A_t L_t)^{1-\alpha-\beta}$, o seu crescimento resultará de $g_Q = \alpha g_K + \beta g_H + (1-\alpha-\beta)(g_A + g_L)$. Substituindo as diferentes taxas pelos valores já calculados vamos chegar a $g_Q = \alpha (n+m) + \beta (n+m) + (1-\alpha-\beta)(n+m)$. Por fim, através de uma mera simplificação da expressão anterior, podemos obter a taxa de crescimento do produto em termos absolutos

$$\boxed{g_Q = n + m} \tag{5.33}$$

Portanto, como todas as variáveis medidas em valores absolutos crescem à mesma taxa,[7] a qual é dada por $n+m$, podemos dizer que a economia como um todo tem uma taxa de crescimento igual a $g = n + m$ no seu equilíbrio de longo prazo.

Por outro lado, a taxa de crescimento do capital físico *per capita* será igual à taxa de crescimento do capital físico à qual se subtrai a taxa de crescimento do factor trabalho $g_{K/L} = g_K - g_L$. Vamos ficar com $g_{K/L} = n + m - n$, isto é

$$\boxed{g_{K/L} = m}$$

A taxa de crescimento do capital humano *per capita* calcula-se recorrendo à mesma metodologia $g_{H/L} = g_H - g_L$. Substituindo as taxas de crescimento pelos seus valores, teremos $g_{H/L} = n + m - n$, e, finalmente

$$\boxed{g_{H/L} = m}$$

Por fim, a taxa de crescimento do produto *per capita* será também $g_{Q/L} = g_Q - g_L$. Vamos substituir as taxas de crescimento por cada um dos seus valores, ficando assim $g_{Q/L} = n + m - n$, ou seja

$$\boxed{g_{Q/L} = m}$$

Portanto, à semelhança do modelo de Solow, conclui–se que há crescimento económico *per capita* apenas se existir progresso técnico, isto é se o conhecimento tecnológico crescer ao longo do tempo. Na Caixa seguinte apresentamos uma síntese das taxas de crescimento das diferentes variáveis relativas ao equilíbrio de longo prazo:

[7] Note que, como $C_t = [1 - (s_K + s_H)]\, Q_t$, então o consumo em valores absolutos cresce à mesma taxa que o produto em valores absolutos $g_C = g_Q = n+m$. Isto pode ser facilmente demonstrado em virtude de $[1 - (s_K + s_H)]$ ser um conjunto de parâmetros. Portanto, C_t cresce apenas se Q_t crescer, e temos o resultado $g_C = g_Q = n + m$.

Taxas de crescimento no equilíbrio de longo prazo

exógenas		endógenas		
$g_L = n$	$g_A = m$	$g_k = g_h = g_q = 0$	$g_{K/L} = g_{H/L} = g_{Q/L} = m$	$g_K = g_H = g_Q = n + m$

Portanto, podemos apresentar mais três conclusões fundamentais do modelo de capital humano:

Conclusão 5.3 *A economia converge para uma trajectória de crescimento equilibrado, e quando esta trajectória é alcançada cada variável cresce a uma taxa constante.*

Conclusão 5.4 *No equilíbrio de longo prazo, o produto per capita, o capital físico per capita, e o capital humano per capita crescem apenas se existir crescimento no nível do conhecimento tecnológico, isto é, se* $m > 0$*. Portanto, a melhoria das condições médias de vida depende inteiramente da taxa de crescimento da tecnologia.*

Conclusão 5.5 *O crescimento económico não depende de qualquer força económica de natureza endógena. Como a taxa de crescimento da produção é igual a* $n + m$*, e estas duas taxas são assumidas como exógenas pelo modelo, a política económica também pouco ou nada pode fazer no sentido de fomentar o crescimento económico no longo prazo.*

5.5 Exemplo Numérico

Tal como fizémos no modelo de Solow, vamos agora proceder a uma simulação numérica no sentido de exemplificar os vários aspectos que analisámos ao longo deste capítulo. Os valores escolhidos para os parâmetros e para as variáveis pré–determinadas deste modelo serão de forma a satisfazer dois objectivos: (i) fornecer resultados que estejam de acordo com a realidade contemporânea das economias desenvolvidas e subdesenvolvidas relativamente às variáveis económicas fundamentais (como sejam a taxa de crescimento do PIB , do PIB per capita, do consumo per capita, etc); e (ii) comparar os resultados deste modelo com o modelo de Solow.

Vamos fazer várias simulações que cubram diferentes situações iniciais quanto aos valores positivos para $k(0)$ e $h(0)$. Países ricos terão certamente valores elevados destes dois stocks de capital, enquanto que países pobres terão valores baixos para os mesmos. Note que um país rico pode ter um stock de capital humano em termos intensivos mais elevado que o seu valor de equilíbrio de longo prazo, causado por exemplo por uma força exógena ou externa ao funcionamento desta economia. Por exemplo, isto pode acontecer se houver uma grande entrada de imigração de técnicos superiores provenientes de outros países. O que acontece nestes casos? Como iremos ver, o nível de capital humano em termos intensivos neste país voltará, ao fim de algum tempo, para o nível que tinha antes do processo de imigração se ter iniciado.

Parâmetros. Nesta simulação vamos assumir os seguintes valores para parâmetros do modelo:

$\alpha = 0.4$	,	$s_K = 0.22$	,	$\delta_K = 0.1$
$\beta = 0.2$	,	$s_H = 0.08$	,	$\delta_H = 0.1$
$n = 0.01$	,	$m = 0.03$		

Condições iniciais. Deve lembrar–se que uma das características fundamentais dos modelos dinâmicos são as condições iniciais e, consequentemente, a sua explicitação deve ser apresentada de forma clara. As condições iniciais são não–triviais (ou seja, os valores iniciais são todos positivos), em virtude de não fazer sentido uma economia ter zero trabalhadores, níveis de capital físico e humano nulos, ou um nível de conhecimento tecnológico igual a zero. Portanto teremos

$$L(0) > 0 \quad , \quad K(0) > 0 \quad , \quad H(0) > 0 \quad , \quad A(0) > 0$$

o que implica as seguintes condições iniciais para as duas variáveis fundamentais do modelo, ambas medidas em valores intensivos

$$k(0) > 0 \quad , \quad h(0) > 0$$

Equações de movimento. As equações que reflectem o comportamento dinâmico do modelo discutido ao longo das secções anteriores são as expressões (5.20) e (5.28). A primeira diz respeito à evolução ao longo do tempo do capital físico em termos intensivos, enquanto que a segunda dá a evolução do capital humano também em termos intensivos, as quais são dadas respectivamente por

$$\dot{k}_t = s_K \cdot k_t^{\alpha} h_t^{\beta} - (n + m + \delta_K)\, k_t$$

$$\dot{h}_t = s_H \cdot k_t^{\alpha} h_t^{\beta} - (n + m + \delta_H)\, h_t$$

Substituindo os valores dos parâmetros acima apresentados nestas equações obteremos as expressões das equações diferenciais que representam a dinâmica de toda a economia

$$\dot{k}_t = 0.22 \cdot k_t^{0.4} h_t^{0.2} - 0.14 k_t$$

$$\dot{h}_t = 0.08 \cdot k_t^{0.4} h_t^{0.2} - 0.14 h_t$$

Equilíbrio de longo prazo para toda a economia. Como se comporta uma economia descrita por este sistema de equações diferenciais? Na *Figura 5.5* mostramos várias trajectórias possíveis e como estas trajectórias convergem todas para o mesmo ponto de equilíbrio de longo prazo, o qual é dado pelo ponto E. Estas trajectórias resultam de diferentes pontos de partida de uma economia, mas também podem reflectir trajectórias temporais de diferentes economias partindo de situações iniciais distintas. Esta figura é denominada por *plano de fases* em contraposição à *linha de fases* que apresentámos no modelo de Solow. Esta diferença no que toca à terminologia utilizada está relacionada com o facto de que neste último modelo tínhamos apenas uma equação de movimento, enquanto que no modelo com capital humano passamos a ter duas, pelo que em vez de uma "linha" que apresenta a dinâmica do modelo passaremos a ter um "plano" composto por duas linhas. Estas duas linhas representam as situações em que $\dot{k}_t = 0$ (linha verde) e $\dot{h}_t = 0$ (linha vermelha), e só existe um ponto que garante que ambas as condições sejam satisfeitas (ponto E).[8]

Como se pode facilmente constatar nesta figura, indiferentemente do ponto de partida, todas as trajectórias convergem para um valor de equilíbrio de longo prazo para k_t e h_t, os quais serão dados por $k_t = k^{\star} \simeq 1.86$ e $h_t = h^{\star} \simeq 0.67$. Estes valores correspondem ao ponto E na referida figura, e podem ser facilmente calculados a partir das duas equações anteriores, bastando para tal impor às mesmas as condições $\dot{k}_t = 0$ e $\dot{h}_t = 0$:

$$\dot{k}_t = 0 \Rightarrow k_t = k^{\star} \simeq 1.86$$

$$\dot{h}_t = 0 \Rightarrow h_t = h^{\star} \simeq 0.67$$

[8] Voltamos a lembrar que o ponto $k_t = 0$ e $h_t = 0$ também satisfaz aquelas condições. No entanto, este ponto não tem sentido em termos económicos, pelo que não é considerado nesta análise.

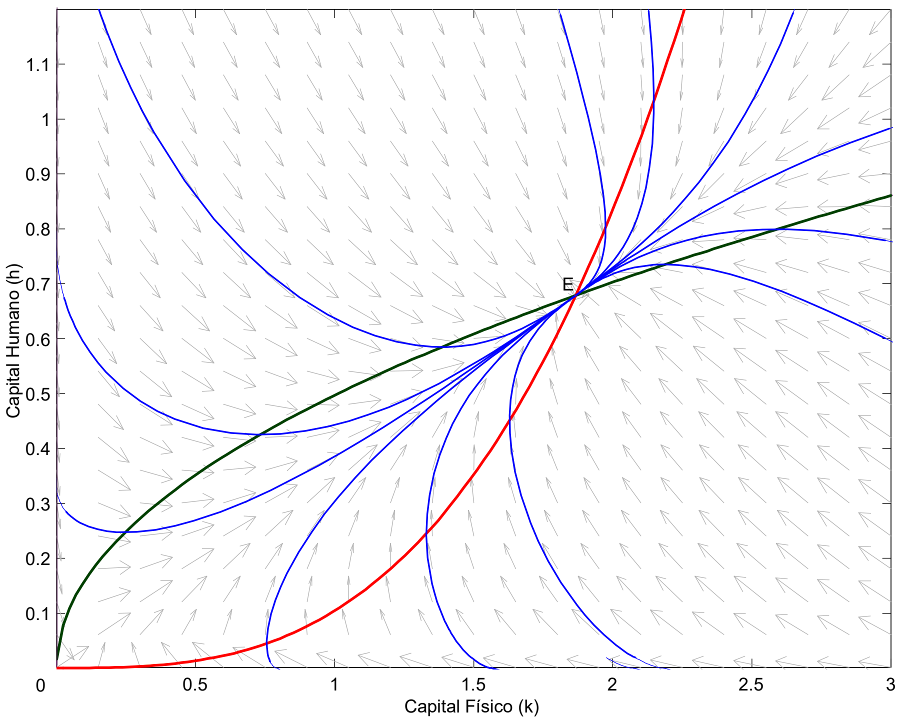

Figura 5.5: O PLANO DE FASES PARA O MODELO NEOCLÁSSICO COM CAPITAL HUMANO. *Este modelo tem um equilíbrio de longo prazo, que é único e estável. Quaisquer que sejam os níveis iniciais de k e h (desde que sejam positivos), levam a que a economia convirja ao longo do tempo para o seu equilíbrio de longo prazo, o qual é dado pelo par $k^{\star} \simeq 1.86$ e $h^{\star} \simeq 0.67$.*

Portanto, através da mera observação da figura podemos concluir que este modelo apresenta um equilíbrio de longo prazo que é único e que é estável, já que qualquer que seja o ponto de partida, a economia converge sempre para $k_t = k^\star$ e $h_t = h^\star$.

Note que caso considerássemos as condições iniciais $K(0) = 0$ e/ou $H(0) = 0$, então teríamos $k(0) = 0$ e $h(0) = 0$, o que levaria a um equilíbrio de longo prazo instável com $k^* = 0$ e $h^* = 0$. O equilíbrio é instável pois qualquer choque que fizesse com que a economia passasse a ter um nível de $K(0) > 0$ e $H(0) > 0$, e portanto $k(0) > 0$ e $h(0) > 0$, ainda que este fosse bastante pequeno ou mesmo insignificante, levaria a economia ao longo do tempo para o ponto de equilíbrio estável que obtivemos nesta figura. Isto é, levaria a economia para o ponto E, onde $k^\star \simeq 1.86$ e $h^\star \simeq 0.67$.

Processo de convergência. Voltemos agora às diferentes trajectórias como sendo umas de países pobres e outras de países ricos. Um país pobre será um país que no momento $t = 0$ apresenta o seu processo de acumulação de capital com valores baixos para $k(0)$ e $h(0)$, enquanto que os países ricos terão níveis de $k(0)$ e $h(0)$ muito próximos de $k^\star \simeq 1.86$ e $h^\star \simeq 0.67$ (ou mesmo iguais a estes valores caso estes países já tenham alcançado o equilíbrio de longo prazo). Na *Figura 5.6* apresentamos quatro diferentes condições iniciais para $k(0)$ e $h(0)$, em que todas convergirão para o equilíbrio de longo prazo dado por $k^\star \simeq 1.86$, $h^\star \simeq 0.67$.

No painel (a), temos um país que inicia o processo de acumulação de capital com ambos os stocks de capital muito baixos, ambos perto de 0.2, ou seja, $k(0)$ e $h(0) \simeq 0.2$. Por esta razão, no processo de convergência para o equilíbrio de longo prazo, ambos os valores destes stocks aumentarão gradualmente até atingirem os seus valores de equilíbrio. Por outro lado, apesar de ambos os stocks partirem do mesmo valor inicial, no novo equilíbrio o valor de k é bastante superior ao de h. Isto deve–se fundamentalmente a duas hipóteses desta simulação: (i) a produtividade marginal do capital físico é muito mais elevada do que a do capital humano devido ao facto de $\alpha > \beta$, ($\alpha = 0.4$, $\beta = 0.2$); (ii) a taxa de poupança destinada à acumulação de capital físico é mais elevada do que a do capital humano ($s_K = 0.22$, $s_H = 0.08$).

No canto superior direito, painel (b), teremos uma economia com abundância de capital humano e uma grande escassez de capital físico, na medida em que $k(0) = 0.01$ e $h(0) \simeq 1.8$. Note que o valor inicial de capital humano é superior ao valor de equilíbrio de longo prazo, pelo que o mesmo irá diminuir gradualmente até estabilizar neste equilíbrio. Quanto ao valor inicial do capital físico, este é pouco superior a zero, sendo, portanto, bastante inferior ao seu valor de equilíbrio de longo prazo. Por esta razão, k_t irá aumentar gradualmente até atingir este valor ($k^\star \simeq$

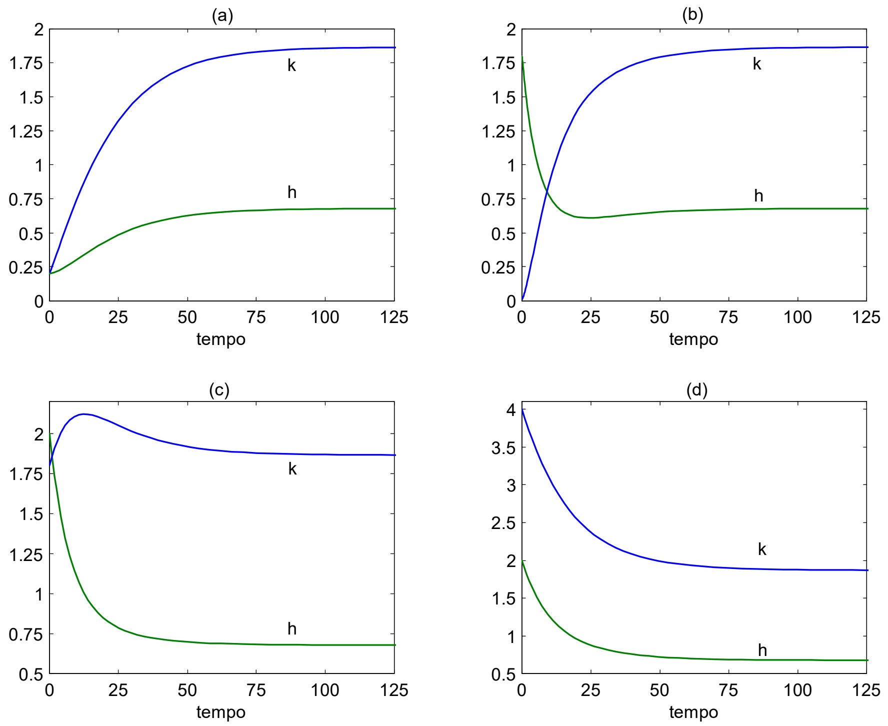

Figura 5.6: DIFERENTES SITUAÇÕES DE PARTIDA NO MODELO NEOCLÁSSICO COM CAPITAL HUMANO. *Como se pode ver nos quatro painéis, existe convergência para um equilíbrio de longo prazo, único e comum a todos os países, independentemente das condições de partida. No caso dos países mais pobres, esta convergência pode levar mais de cem anos a ser completada, conforme painel (a).*

1.86).

No painel (c) temos um caso bastante interessante. Suponha um país que estaria já no equilíbrio de longo prazo, tendo ambos os stocks de capital físico e humano iguais ou muito próximos dos respectivos valores de equilíbrio de longo prazo. Isto significa que deverá tratar–se de um país rico em termos económicos. Suponha agora que o país que estamos a analisar recebe uma enorme entrada de trabalhadores qualificados, cientistas, engenheiros, etc., causado por uma convulsão social num país vizinho (ou por qualquer outra razão, social, política, ou natural). Neste caso, o nível do capital humano deste país sofre um aumento brusco passando, por exemplo, para um nível próximo de $h(0) \simeq 2$, o qual é bastante superior ao valor de equilíbrio de longo prazo ($h^{\star} \simeq 0.67$). Como foi dito, o nível inicial de k é próximo do valor de equilíbrio de longo prazo, sendo de $k(0) \simeq 1.8$ no caso concreto deste exemplo. Como podemos facilmente verificar no painel (c), este choque positivo resultante da imigração de técnicos qualificados vai–se esbatendo ao longo do tempo, levando a economia de novo para o equilíbrio de longo prazo dado por $k^\star \simeq 1.86$ e $h^\star \simeq 0.67$.

A situação descrita no painel anterior pode ser generalizada para países que recebam choques positivos em ambos os stocks de capital, conforme podemos ver no painel (d). Se num dado momento no tempo, uma economia tiver o seu processo de acumulação de capital caracterizado por valores de $k(0)$ e $h(0)$ superiores aos valores que correspondem ao equilíbrio de longo prazo, esta economia verá estes stocks diminuirem gradualmente até atingirem os seus respectivos valores de equilíbrio.

Portanto, uma economia que seja pobre irá convergir para os níveis de equilíbrio dos stocks de capital físico e humano em termos intensivos dos países mais ricos. Uma economia que seja já rica e que, devido a uma conjuntura internacional favorável, beneficie de uma entrada massiva de capitais de natureza física e/ou humana (os quais páram depois desta conjuntura ter sido ultrapassada), verá esta "benesse" ser eliminada o longo do tempo, voltando para os níveis de equilíbrio de longo prazo comuns a todas as restantes economias. Este choque positivo é eliminado fazendo com que k_t e h_t convirjam para $k^\star \simeq 1.86$ e $h^\star \simeq 0.67$ ao longo de várias décadas. Por exemplo, no caso do painel (a) — uma situação em que a economia pobre está *bem longe* do equilíbrio de longo prazo — k_t levará mais de cem anos para atingir o seu valor de equilíbrio de longo prazo.

Devemos salientar que a convergência económica para o equilíbrio de longo prazo é mais lenta neste modelo de capital humano do que no modelo de Solow. Note que nesta simulação utilizámos os mesmos valores para os parâmetros que utilizámos no modelo de Solow,[9] no entanto enquanto que no modelo de Solow o processo de convergência (que resultava de valores iniciais de k próximos de zero até ao equilíbrio de longo prazo) demorava à volta de sessenta ou setenta anos, no caso do modelo com capital humano esta convergência levará mais de cem anos.

Portanto, este modelo permite mostrar os seguintes pontos relativamente ao crescimento económico em termos internacionais:

[9] Os parâmetros utilizados no modelo de Solow foram: $\alpha = 0.4$, $n = 0.01$, $m = 0.03$, $\delta_K = 0.1$. No modelo com capital humano, para além de utilizarmos estes valores, tivémos que usar valores para parâmetros que não existiam no modelo de Solow. O valor da taxa de depreciação do capital humano é o mesmo do capital físico ($\delta_H = 0.1$), e a elasticidade do produto relativamente ao capital humano é de $\beta = 0.2$. É este último parâmetro que explica a convergência mais lenta no modelo de capital humano. Este é um ponto que será abordado em maior detalhe no capítulo destinado unicamente à problemática da "convergência".

Conclusão 5.6 *(i) As condições de partida, em termos de pobreza ou riqueza entre diferentes economias, não explicam o ritmo do crescimento económico de equilíbrio de longo prazo;*
(ii) Todos os países convergirão para o mesmo equilíbrio de longo prazo;
(iii) No entanto, esta convergência deverá levar várias décadas para ser alcançada, sendo inclusivé mais lenta que no modelo de Solow.

5.6 Sumário

1. No modelo neoclássico de crescimento com capital humano existe equilíbrio e este equilíbrio é único.
2. Neste modelo existe estabilidade do equilíbrio de longo prazo, já que, se a economia se afastar temporariamente da trajectória de equilíbrio de longo prazo, o próprio funcionamento do sistema encarregar–se–á de a fazer regressar à mesma trajectória.
3. As taxas de crescimento, quer das variáveis medidas em termos absolutos, quer das variáveis medidas em termos per capita, são totalmente iguais às taxas que obtivemos no modelo de Solow.
4. Quanto à convergência económica entre países ricos e pobres, o modelo neoclássico com capital humano produz resultados bastante semelhantes aos do modelo de Solow:
   (a) As condições de partida, em termos de pobreza ou riqueza entre diferentes economias, não explicam o ritmo do crescimento económico de equilíbrio de longo prazo;
   (b) Todos os países convergirão para o mesmo equilíbrio de longo prazo;
   (c) No entanto, esta convergência deverá levar várias décadas para ser alcançada.
5. Existe uma excepção ao ponto anterior: esta convergência é mais lenta do que no modelo de Solow.